Hyperkahler manifolds Monopoles and Legendre Transformation

数理解析研究所講究録
775巻 1992年 44-74

Hyper Kähler manifolds Monopoles and Legendre Transformation

東大理学部 後藤竜司 (Ryushi Goto)

§1 Introduction

(X, g) を $4n$ 次元リーマン多様体とし、I, J, K を X 上の3つの概複素構造とする。

この時 I, J, K と g が次の条件を満たしているとする

1) $I^2 = J^2 = K^2 = -1 \in End(TX)$

$IJ = -JI = K$

2) $\forall u, v \in TX$

$$g(u, v) = g(Iu, Iv) = g(Ju, Jv) = g(Ku, Kv)$$

3) ∇ を g に関する Levi-civita connection とすると

$$\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0$$

この時 (X, g, I, J, K) を Hyper Kähler 多様体と呼ぶ。

以下 metric g は complete とします。

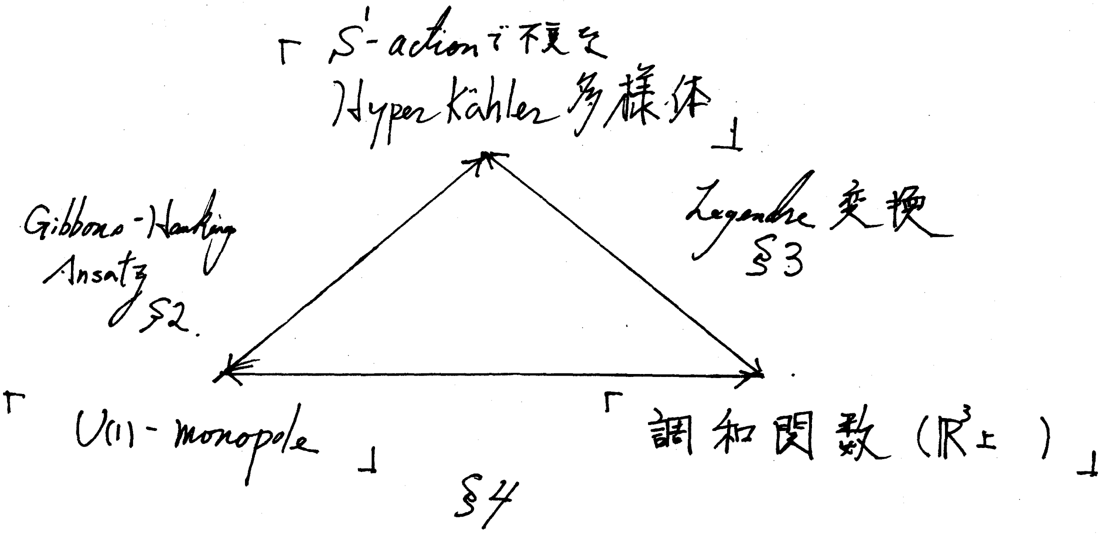
この論説では、Non compact かつ complete な Hyper Kähler 多様体について論じたいと思います。

このような Non-compact, complete Hyper Kähler 多様体は、インスタントン, モノポールそしてヒッグスバンドルのモジュライ空間として登場することが知られています。
(References 2. 3. 4. 5)
また、K3 Surface を崩壊させた時、その"断片"として現われることも観察されています。(References 5)
しかしながら、その重要性にもかかわらず、このような多様体の具体的な example はあまり知られていません。最初の Non-Trivial な example は江口-Hanson, Gibbons-Hawking により構成されました。彼らは U(1)-monopole を使って Hyper kähler 多様体を造ったのですが、彼らの方法は Gibbons-Hawking Ansatz と呼ばれ、高次元に拡張されています。
§2 でこの Ansatz を S^1-action で不変なインスタントンの立場から解釈し、論じます。

一方 Hyper-Kähler多様体を構成する別な方法として Legendre変換と呼ばれているものがあります。この変換によって、standard metricに関する$\mathbb{R}^3$上の調和関数からHyper-Kähler多様体が造られます。§3でこの変換について論じます。

§4では、Gibbons-Hawking's Ansatzと Legendre変換の間の明確な対応について論じます。

§5では、具体的にHyper-Kähler多様体を構成します。



§1. Gibbons-Hawking's Ansatz.

最初に Moment map を定義する。
(X, g, I, J, K) を Hyper-Kähler 多様体、G を Lie group とする。この時、X の Hyper Kähler 構造を保存する G-作用を考えます。

つまり G-作用 $G \curvearrowright X$ は metric g について isometry、かつ、I, J, K 全てと commute しているとします。

また、$\omega_I, \omega_J, \omega_K$ をそれぞれ、I, J, K に対応する Kähler form とします。

Def.

G の Lie alg の dual に値をもつ、3つの X 上の関数 μ_I, μ_J, μ_K が 次の条件 1), 2) を満たす時 それぞれ I, J, K に対応する moment map という。

1) $\forall g \in G, \forall x \in X$

$$\mu_I(gx) = Ad(g)^* \mu_I(x)$$
$$\mu_J(gx) = Ad(g)^* \mu_J(x)$$
$$\mu_K(gx) = Ad(g)^* \mu_K(x)$$

2) $\forall \xi \in Lie(G)$

$$d\langle \mu_I, \xi \rangle = \omega_I(\xi, \cdot) \in \Omega^1(X)$$
$$d\langle \mu_J, \xi \rangle = \omega_J(\xi, \cdot) \in \Omega^1(X)$$
$$d\langle \mu_K, \xi \rangle = \omega_K(\xi, \cdot) \in \Omega^1(X)$$

以上．3つの moment map μ_I, μ_J, μ_K を一つにまとめて．$\mu = (\mu_I, \mu_J, \mu_K)$ Hyper-Kähler moment map と呼ぶことにする。

$$\begin{array}{cccc} \mu : & X & \longrightarrow & Lie(G) \otimes \mathbb{R}^3 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ & x & \longmapsto & (\mu_I(x), \mu_J(x), \mu_K(x)) \end{array}$$

注) moment map は mod Const で Unique に決まる。

また．$H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$ なら常に存在する。

次に Gibbons-Hawking's Ansatz について説明する。

(X^{4n}, g, I, J, K) を $4n$ 次元 non-cpt hyperkähler 多様体とし、n 次元 Torus T^n が free に X の hyperkähler 構造を保つ作用をしているとする。

この際、我々は、この Torus 作用に対する Hyperkähler Moment map $\mu : X \longrightarrow (\mathrm{Lie}\,T^n)^* \otimes \mathbb{R}^3$ の存在を仮定する。

$\{\xi_i\}_{i=1}^n$ を $\mathrm{Lie}\,T^n$ の basis とし、この basis によって $(\mathrm{Lie}\,T^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ と同一視する。以下この basis を fix して考える。また、$V_i \in \mathfrak{X}(X)$ を $\xi_i \in \mathrm{Lie}\,T^n$ に対応する X 上の vector field とする。

この時、$\{V_i\}_{i=1}^n$ が一次独立であると仮定しておく。

$$T^n \overset{\text{free}}{\curvearrowright} (X, g, I, J, K) \xrightarrow[\mu = (\mu_I, \mu_J, \mu_K)]{T^n\text{-主束}} \mathbb{R}^3 \otimes (\mathrm{Lie}\,T^n)^* \cong \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n$$

さて、このT^n-主束上には、自然な$(\mathrm{Ad}\,X)$ valued section Φ と connection A が存在する。

__Def__. $V_i, V_j \in \mathcal{X}(X)$ as above

$g_{ij} := g_X(V_i, V_j)$ とした時、

Matrix g_{ij} の逆行列を Φ と定義する。

$$\Phi := (g_{ij})^{-1} : X \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

次に、$V := \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ とし、T^n-主束 $X \to \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n$ 上の Distribution、$IV \oplus JV \oplus KV$ によって定義された Connection を A とする。

今、$\mathrm{Lie}\,T^n \cong \mathbb{R}^n$ と同一視しているので、

$A \in \Omega^1(X, \mathbb{R}^n)$

ゆえに A を 1-form valued な列-vector とみて、

$\hat{A} := \Phi^{-1} A$ を定義する。

Prop (Gibbons-Hawking's Ansatz)

$\hat{A} := \Phi^{-1}A \in \Omega^1(X, \mathrm{Lie}\,T^n)$

は X 上の Trivial T^n-bundle 上の T^n-不変な connection と思える。

$$\begin{array}{ccc} X \times T^n & & \\ \downarrow & & \\ T^n \curvearrowright X & \xrightarrow[T^n]{} & \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n \end{array}$$

その時、$\hat{A}$ の Curvature $\hat{F}$ は X 上の complex st I, J, K それぞれについて不変な 2-form である。

(i.e. $\forall u, v \in TX$ $\hat{F}(u,v) = \hat{F}(Iu, Iv) = \hat{F}(Ju, Jv) = \hat{F}(Ku, Kv)$)

注). $n=1$、つまり 4次元の時、I, J, K で不変な 2-form とは、Anti-self-dual 2-form のことである。

更に、4次元の時、$\hat{A}$ が Anti-self-dual connection であることと、(Φ, A) が monople であることは同値である。

Monople とは次の方程式を満たす (Φ, A) のことである。 $*D_A\Phi = F_A$ on $\mathbb{R}^3$

注）により 次の定義は妥当と思われる。

Def X^{4n}; hyper kähler 多様体（4n次元）
$X \longrightarrow \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n$ を T^n-主束とする。
$\Phi \in \Omega^0(\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n, \mathrm{End}(\mathrm{Lie}\, T^n))$
A; X 上の connection
Φ を X 上の section とみて $\hat{A} := \Phi^{-1} A$ を定義する。

この時、
$d\hat{A}$ が I, J, K-不変な 2-form の時、
(A, Φ) を"一般化された monopole"と呼ぶ。

Prop の証明は、 $V \oplus IV \oplus JV \oplus KV \cong TX$
であること、そして、I, J, K について
Nijenhuis Tensor $\equiv 0$ から導かれる。

重要なことは、Prop の逆が成立することである。
つまり、一般化された monopole (A, Φ)
が $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n$ 上与えられると、$(\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n) \times T^n$ 上
Hyper Kähler structure を構成することができる。

Propとその逆により、次の二つの対象にbijectiveな対応が存在することがわかる。

"T^n-actionをもつ4n次元hyperkähler多様体"

$$\updownarrow \text{bijective}$$

"$\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n$上の一般化されたMonopole"

注)．4次元の時．上の対応はGibbons-Hawkingにより（1978）に得られた。
また．高次元の場合は．Pedersen-Poonによる結果（1988）がある。

注)．実際にnon trivialなhyperkähler多様体をつくるためには．Singular Monopleを使わなければならない。

§2. Legendre 変換

次に. Legendre 変換について説明する。この変換によって. $\mathbb{R}^{3n}$ 上の real function で次の条件 *, ** を満たすものと. T^n-action をもつ $4n$ 次元 Hyper Kähler 多様体が bijective に対応する。

$\mathbb{R}^{3n} \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{C}^n$ と同一視し.
$(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ を real cood, $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ を complex coord とした時.

条件 *
$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} \right] f \equiv 0 \qquad \forall i \in \{1, \cdots, n\}$$

条件 ** $\hat{\Phi}_{ij} := \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \frac{\partial}{\partial t_j}\right) f$ とした時.

行列 $(\hat{\Phi}_{ij})$ は Positive-definit である.

" free T^n-action をもつ Hyper Kähler 多様体 "

$\Updownarrow$ bijective

$\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^{3n}) \mid$ 条件 $*$, $**$ を満たす。$\}/\sim$

X^{4n} を $4n$ 次元 Hyper Kähler 多様体.
$T^n \curvearrowright X^{4n}$ を X の Hyper Kähler st を保つ
X の Twistor space を Z とする.
この Z は $(2n+1)$ 次元 complex 多様体であり.
$X \times \mathbb{C}P^1$ に diffeo である。X への projection を π.
$\mathbb{C}P^1$ への projection を p とする。この時. p は holomorphic
であることが知られている。

X へ T^n-action があることから. Z への T^n-action
が存在する。この T^n-action を複素化した $(\mathbb{C}^*)^n$
-action が存在すると仮定する。

$\omega_Z \in \Lambda^2_F(Z, p^*\mathcal{O}(2))$ を Twistor space Z 上
定義される holomorphic symplectic 2-form
とすると.

Z 上の $(\mathbb{C}^*)^n$-action は ω_Z を保っている。

この時、ω_Z に関する $(\mathbb{C}^*)^n$-action の complex moment map を μ^Z とする。
この μ^Z の存在は、HyperKähler moment map $\mu = (\mu_I, \mu_J, \mu_K)$ の存在と同値である。

$$\mu^Z : Z \xrightarrow{(\mathbb{C}^*)^n\text{-主束}} \mathcal{O}(2)\otimes\mathbb{C}^n$$

(ここで $\mathrm{Lie}(\mathbb{C}^*)^n \cong \mathbb{C}^n$ としている。)

この $\mathcal{O}(2)\otimes\mathbb{C}^n$ を T と書き、mini-Twistor space と呼ぶことにする。
ここで $\mathcal{O}(2) \cong T\mathbb{P}^1$ ($\mathbb{CP}^1$ の Tangent bundle である。)

この状況は下の可換図式で表現される。

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^*)^n \curvearrowright & Z \arrow[rr, "\mu^Z"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "p", "\mathrm{hol}"'] & & \mathcal{O}(2)\otimes\mathbb{C}^n \equiv T \arrow[dl, "q"] \\
T^n \arrow[u, "\text{複素化}"] \overset{\text{free}}{\curvearrowright} & X & \mathbb{CP}^1 &
\end{tikzcd}$$

以下 μ^Z が Surjective であると仮定する。

Hyperkähler 多様体 はその Zwistor Space により再構成されることが知られている。
今の状況では 前ページ図式より Zwistor Space は $T = \mathcal{O}(2)\otimes\mathbb{C}^n$ 上の $(\mathbb{C}^*)^n$-主束になっている。ゆえに Hyperkähler 多様体 X の全ての情報は T 上の $(\mathbb{C}^*)^n$-主束 の TRANSITION FUNCTION に含まれている。
さて この $(\mathbb{C}^*)^n$-主束を調べる前に少し準備する。

Hyperkähler 多様体 X の Zwistor Space Z には anti-holomorphic involution I_Z が定義される。$\mathbb{C}P^1$ 上の bundle $Z \xrightarrow[p]{} \mathbb{C}P^1$ の I_Z で不変な holomorphic section を考える。このような Section は Z の real line と呼ばれ、real line 全体 は元の多様体 X でパラメタライズされる。

一方、Z の minitwistor Space $T = \mathcal{O}(2)\otimes\mathbb{C}^n$ 上にも anti-holomorphic involution I_T が定義される。同様に holomorphic bundle $T \to \mathbb{C}P^1$ の I_T で不変な holomorphic section は T の real line と呼ばれ、T の real line 全体は $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n$ でパラメタライズされる。

$\tilde{\mathcal{Z}}$ は T 上の $(\mathbb{C}^*)^n$-主束であるから、$\mathbb{C}^*$-主束の直積に分解される。

$$\tilde{\mathcal{Z}} = L_1 \times \cdots \times L_n \qquad L_i \in H^1(T, \mathcal{O}^*)$$

$$s_x \in H^0(\mathbb{C}P^1, T) \quad \text{real line} \quad x \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n$$

とすると、$s_x^* L_i = 0 \in H^1(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}^*)$

となっていることに注意する。

次の sheaf 係数 cohomology の sequence を考える。

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow H^1(T, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\exp} & H^1(T, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & H^2(T, \mathbb{Z}) & \rightarrow \\
 & & \downarrow s_x^* & & \downarrow s_x^* & \\
 & \longrightarrow & H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}^*) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}) & \rightarrow
\end{array}$$

上の注意から、$\delta(L_i) = 0 \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}$

ゆえに、$\exists \hat{L}_i \in H^1(T, \mathcal{O})$ st $L_i = \exp \hat{L}_i$

この $\hat{L}_i$ を $\mathbb{C}$ を加法群とした時の $\mathbb{C}$-主束と思い

$\mathbb{C}^n$-主束 $\hat{\mathcal{Z}}$ を $\hat{L}_1 \oplus \cdots \oplus \hat{L}_n$ として定義する。

$$\begin{tikzcd} \hat{Z} := \hat{L}_1 \oplus \cdots \oplus \hat{L}_n \arrow[rr, "\mathbb{C}^n\text{-主束}"] \arrow[dr] & & T\mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{C}^n := T \arrow[dl] \\ & \mathbb{CP}^1 & \end{tikzcd}$$

$Z \to T$ の Transition function を調べる代りに
$\hat{Z} \to T$ の Transition function を調べる。

そのために局所座標を導入する。

$\mathbb{CP}^1$ は 2つの $\mathbb{C}$ を張り合わせて得られる.
その coordinate をそれぞれ ζ, ζ' とする.
$T = T\mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{C}^n$ は 2つの $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ を張り合わせて得られる. その coordinate をそれぞれ
$(\zeta, \eta_1, \cdots, \eta_n)$, $(\zeta', \eta_1', \cdots, \eta_n')$ とする。

最後に
$\hat{Z}$ は 2つの $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ を張り合わせて得られる。
その coordinate をそれぞれ
$(\zeta, \eta_1, \cdots, \eta_n, \xi_1, \cdots, \xi_n)$, $(\zeta', \eta_1', \cdots, \eta_n', \xi_1', \cdots, \xi_n')$
とする。

この局所座標によって $\hat{\Sigma}\to T$ の Transition function は以下のように表現される。

$$\zeta' = \zeta^{-1}, \quad \eta_i' = \zeta^{-2}\eta_i \quad \xi_i' = \xi_i + G_i(\zeta, \eta_1, \cdots \eta_n)$$

ここで、

$G_i(\zeta, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ は T を cover する2つの $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ の intersection で定義される holomorphic function である。

最初の2式は図式 $\begin{tikzcd} \hat{\Sigma} \arrow[rr] \arrow[dr] & & T \arrow[dl] \\ & \mathbb{C}P^1 & \end{tikzcd}$ が可換であることから、

T の Transition function を表現している。

最後の式は、$\hat{\Sigma}\to T$ が $\mathbb{C}^n$ を加法群として $\mathbb{C}^n$-主束であることから得られる。

更に、$\hat{\Sigma}$ 上の holomorphic symplectic form $\omega_{\hat{\Sigma}}$ がこの Transition で保たれることから

$\sum_{i=1}^{n} G_i\, d\eta_i$ は2つの $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ の intersection 上 exact 1-form となっている。

ゆえに $\exists H = H(\zeta, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ holomorphic function

s.t.

$$G_i = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}$$

このことから $\hat{Z} \to T$ の Transition function は H によって表わされている。

さて、もう一度 Sheaf を使った議論にもどる。

$T = \mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{C}^n \xrightarrow{p} \mathbb{C}P^1$ に対して "differentiation along fibres d_F" を下の2つの map の組み合わせによって定義する。

$$d_F : \mathcal{O}_T \xrightarrow{d} \Omega^1_T \xrightarrow{\pi} \Omega^1_F$$

ここで π は $T \to \mathbb{C}P^1$ の fibre 上に Ω^1_T を制限する map である。

ここで $\Omega^1_F \cong p^*\mathcal{O}(1) \otimes \mathbb{C}^n$ となっている。

Short exact sequence

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1} \to \mathcal{O}_T \xrightarrow{d_F} \Omega^1_F \to 0$$

上の事実と合わせて.

$$\to H^1(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}) \to H^1(T,\mathcal{O}) \xrightarrow{d_F} H^1(T, p^*\mathcal{O}(-2)\otimes\mathbb{C}^n) \to H^2(\mathbb{C}P^1,\mathcal{O}) \to$$

$H^1(\mathbb{C}P^1,\mathcal{O}) \cong H^2(\mathbb{C}P^1,\mathcal{O})=0$ より.

$$H^1(T,\mathcal{O}) \overset{d_F}{\cong} H^1(T, p^*\mathcal{O}(-2)\otimes\mathbb{C}^n)$$

を得る。

$^\forall x\in \mathbb{R}^3\otimes\mathbb{R}^n$ に対して T の real line s_x をとる。

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d] \\ \mathbb{C}P^1 \arrow[u, bend left, "s_x"] \end{tikzcd} \qquad H^1(T, p^*\mathcal{O}(-2)\otimes\mathbb{C}^n) \xrightarrow{s_x^*} H^1(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}(-2)\otimes\mathbb{C}^n)$$

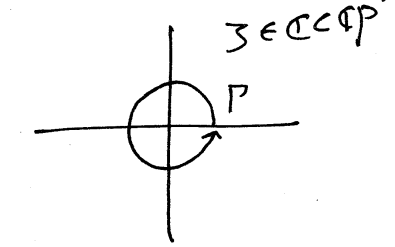
Serre duality より.

$$H^1(\mathbb{C}P^1,\mathcal{O}(-2)\otimes\mathbb{C}^n) \cong H^0(\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}^{n}\otimes\mathcal{O}) \cong \mathbb{C}^n$$

しかしこの同型をもっと直接与える。

ζ を $\mathbb{C}P^1$ の affine coordinate とし.

Γ を右図のように原点を回る circle とする



$H^1(\mathbb{C}P^1,\mathcal{O}(-2)\otimes\mathbb{C}^n)$ を Čech coh group と思い. $\mathcal{O}(-2)$ が P^1 の canonical line bundle であることに注意すれば. $H^1(\mathbb{C}P^1,\mathcal{O}(-2)\otimes\mathbb{C}^n)$ の任意の元は

$f(\zeta)d\zeta$ の形で表わされる。$f(\zeta)$ は $\mathbb{C}^*$ 上の holomorphic $\mathbb{C}^n$ valued function である。
Γ に沿って積分し、次の同

$$k;\ H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(-2)\otimes\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^n$$
$$[\,f(\zeta)d\zeta\,] \longmapsto \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta)d\zeta$$

さて、$\hat{\mathcal{L}} = \hat{L}_1 \oplus \cdots \oplus \hat{L}_n$ であり、
$\hat{L}_i \in H^1(T, \mathcal{O}) \cong H^1(T, p^*\mathcal{O}(-2)\otimes\mathbb{C}^n)$
であった。
$\mathbb{R}^3\otimes\mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{C}^n$ 値 - function を次のように定義する。

Def.
$$\hat{\Phi}_i : \mathbb{R}^3\otimes\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$x \longmapsto k\circ(A_x)^* L_i$$

ここで、A_x は $x \in \mathbb{R}^3\otimes\mathbb{R}^n$ に対する real line である。
$\hat{\Phi}_i = (\Phi_{i1}, \cdots, \Phi_{in})$ と書き、
matrix valued function $\hat{\Phi}_{ij}$ を定義する。

一方、$\hat{Z} \longrightarrow T$ の Transition function は、
$H(\zeta, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ により表現されていたことから、
この H により、別の関数 f をつくる。

Def

$$f : \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} H(\zeta, \eta \circ \Delta_x(\zeta))\, d\zeta$$

ここで $\Delta_x(\zeta)$ は $T \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ の real line
である。

real line の定義より $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{C}^n$ と
同一視されている。この座標を $(t_1, \cdots, t_n, z_1, \cdots, z_n)$
とする。

この時、次の２つが成立する。

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_{ij} = \dfrac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} f \\ \left[\left(\dfrac{\partial}{\partial t_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i}\right) \right] f = 0 \qquad \forall i \in \{1, \cdots, n\} \end{cases}$$

— ＊

$\hat{\Phi}_{ij}$ は $\hat{\Sigma} \to T$ の coordinate のとり方に depend していないが f は depend している。ゆえに、次のような同値関係を考慮しなければならない。

<u>Def</u>

$f, f' \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n)$

$$f \sim f' \iff \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} f = \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} f' \quad \forall i, j \in \{1, \cdots, n\}$$

したがって我々は次のような自然な対応を構築した。

「free T^n-action をもつ Hyper Kähler 多様体」

$$\Downarrow$$

$\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n) \mid f$ は $*$. を満たす$\} / \sim$

重要なことは、前ページの逆の対応が成立することである。つまり、条件 *、** を満たす $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^3)$ から T^n-action をもつ Hyper Kähler 多様体が構成されることである。これは f から $T^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^3$ 上の Kähler Potencial をつくり、その Ricci-Curvature が Vanish していることから導かれる。

以上 この bijective な対応を
Legendre 変換と呼んでいる。

注). Legendre 変換は最初、Hitchin-Karlhede-Lindström, Rocek (1987) により発見された。
その後、Pedersen-Poon (1988) により、Sheaf cohomology を用いた議論が展開された。

§4 Gibbons-Hawking's Ansatz と Legendre 変換の関係について.

G-H Ansatz により. free T^n-action をもつ Hyper Kähler 多様体 と "一般化された monopole" が対応させられた。
また. Legendre 変換により free T^n-action をもつ Hyper Kähler 多様体は 条件 *, ** を満たす $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n)$ の同値類と対応した。
ここでは $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n)$ と一般化された monopole との関係について述べる。

$$T^n \curvearrowright X \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n$$ に対し.

一般化された monopole (A, Φ) を考える。
ここで Φ は $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n = \mathrm{Image}\,\mu$ 上の $GL(n, \mathbb{R})$ 値関数である。
Φ の成分を Φ_{ij} とする。

一方. $T \cong TP^1 \otimes \mathbb{C}^n$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n)$ を X に対応する関数とすると、この $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n = T$ の real line 全体であった。

この時. 次の対応が成立する。

$$\mathrm{Image}\,\mu \cong T\text{の real line 全体}$$

更に. X の complex structure の内、I を特別視することにより. $\mathbb{R}^{3n} \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{C}^n$ と同一視する。

上の対応の下に次の Prop が成立する.

~~Prop~~ $(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ の coordinate とする.

$$\mathrm{Re}\,\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} f = \Phi_{ij} \quad \text{on } \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n$$

[つまり. §3 で定義した $\hat{\Phi}_{ij}$ を使えば

$$\mathrm{Re}\,\hat{\Phi}_{ij} = \Phi_{ij}$$

が成立する。]

以上により、次の3つの対象の間に commutative かつ bijective な対応がついた。

「free T^n-action をもつ hyperkähler 多様体」

G-H Ansatz ↗↙　　↖↘ Legendre 変換

「一般化された Monopole」$/ \partial^2$ ⟷ $\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^n) \mid f$ は $*, **$ を満たす$\} / \sim$

§5 Example

1) $\mathbb{C}^{2n} \cong \mathbb{H}^n$ は Hyperkähler 多様体である。
$T^n \curvearrowright \mathbb{C}^{2n}$ を以下のごとく定義する。

$(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}) \in T^n$ に対して
$(\alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{C}^{2n}$

$$(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}); (\alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_n, \beta_n) \longmapsto (e^{i\theta_1}\alpha_1, e^{-i\theta_1}\beta_1, \cdots, e^{i\theta_n}\alpha_n, e^{-i\theta_n}\beta_n)$$

これが $\mathbb{C}^{2n}$ の Hyperkähler st を保つことは明らか。

但し、このT^n-action は fixed point をもつ。
この事実は、$\mathbb{C}^{2n}$ に対応する monopole が
特異点を持つことに反映される。

実際 $\mathbb{C}^{2n}$ に対する一般化された monopole の Φ
は次の通り。
$\mathbb{R}^{3n} \ni (t_1, \cdots, t_n, z_1, \cdots, z_n)$. $r_i = t_i^2 + z_i \bar{z}_i$ として、

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{r_i}$$

逆に monopole (A, Φ) から $\mathbb{C}^{2n}$ をつくる時
は $\mathbb{C}^{2n}$ から T^n-action の fixed set を抜いた
所に最初に Hyper Kähler st を構築し、
その後 $\mathbb{C}^{2n}$ に拡張し、Complete Hyper Kähler
多様体をつくることになる。

2) Gibbons-Hawking 多様体

$\{P_i\}_{i=1}^{k+1}$ を $\mathbb{R}^3$ 上互いに異なる k 個の点の集合
とする。

$$r_{P_i}(x) := \| x - P_i \| \qquad x \in \mathbb{R}^3$$

（ P_iからの距離関数 ）

とし、

$$\Phi := \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{r_{P_i}} \qquad \text{とする。}$$

Φ は $\mathbb{R}^3$ 上の Harmonic function である。

この Φ を Higgs field とする $\mathbb{R}^3$ 上の Singular monopole (A, Φ) を考える。

Gibbons-Hawking's Ansatz により $\mathbb{R}^3 \setminus \{P_i\}_{i=1}^{k}$ 上の S^1-主束に、(A, Φ) に対応する Hyperkähler structure を構成する。

この多様体に k個の点を加え Completion したものが Gibbons-Hawking 多様体と呼ばれる。4次元 non-cpt, complete manifold である。

最初にとった点集合 $\{P_i\}_{i=1}^{k+1}$ が一直線に並んでいるとする。その時、

この G-H 多様体は $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{k+1}$ の Minimal Resolution と biholomorphic である。（ある complex st に関して）

ここで $\mathbb{Z}_{k+1}$ は $(k+1)$次巡回群であり
$\mathbb{H}^1 \cong \mathbb{C}^2$ に $\mathbb{Z}_{k+1} \subset Sp(1)$ として作用している。

更にこの時、$H_2(X, \mathbb{Z})$ の自然な basis $\{\Sigma_i\}_{i=1}^{k}$
が存在し、Intersection number について

$$\Sigma_i \cdot \Sigma_j = \begin{cases} -2 & i = j \\ -1 & i = j+1 \text{ or } j-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成立している。

3) Gibbons-Hawking 多様体の高次元化

G において、Gibbons-Hawking 多様体、
更に、Calabi によって発見された Hyperkähler
多様体 $T^*\mathbb{P}^n$ を含む Hyperkähler
多様体の族が発見された。これらは
それらの次元を $4n$ とすると、n次元 Torus
によって act されている。

References

1 Hitchin - Karlhede - Lindström - Rocek
Hyper Kähler metric and Super Symmetry
Comm Math Phys 108. 537-587 (1987)

2. Atiyah - Hitchin
The geometry and Dynamics
of Magnetic Monopoles
Princeton

3. Hitchin
The self-duality equations on Riemann Surface
Proc. London Math. Soc 55 (1987)
59 ~ 126.

4 Kronheimer - Nakajima
Yang - Mills Instantons
on ALE gravitational instantons
Math Annalen 288. 263 ~ 307 (1990)

References

5. Nakajima
Moduli spaces of anti-self-dual connections on ALE gravitational instantons
Inventions 102. 267-303 (1990)

6 Nakajima
Hausdorff convergence of Einstein 4-manifolds
J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 35. 411~424 (1988)

7 Pedersen - Poon
Hyperkähler Metrics and a Generalization of the Bogomolny equations
Comm Math Phy 117. 569~570 (1988)